

Влияние гистерезисного звена на поведение нелинейной системы с внутренним резонансом

Е. А. Смирнова, e-mail: lena246323@yandex.ru

ФГБОУ ВО "Воронежский государственный университет"

***Аннотация.** В данной статье рассматривается влияние гистерезисного звена на поведение системы связанных нелинейных осцилляторов с внутренним резонансом. В качестве модели гистерезисного звена выбрана модель Боука-Вена.*

***Ключевые слова:** гистерезис, внутренний резонанс, нелинейная система, модель Боук-Вена*

Введение

Одним из важнейших понятий в теории механических колебаний является понятие резонанса (от лат. "resono" - отклик). Впервые данное явление описал Г. Галилей в своих трудах, где исследовал динамику простых маятников. Более детально история механического резонанса описана в работе А.С. Смирнова и Б.А. Смольникова [1].

Под классическим определением "резонанса" можно понимать отклик колебательной системы на периодическое воздействие внешней силы, которое проявляется в синхронизации собственной частоты (спектра частот) колебаний системы с частотой внешнего воздействия, что влечет за собой резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний этой системы.

На сегодняшнее время написано достаточное количество работ, из которых можно сделать вывод, что такое явление как "резонанс" может быть как полезным, так и вредным явлением, поэтому с теоретической и практической точки зрения, существует высокий интерес к его исследованию в различных механических системах.

Также важно отметить, что нелинейные зависимости гистерезисного типа повсеместно возникают в различных разделах физики, механики, биологии и др. науках. Учет гистерезисных эффектов необходим во многих проблемах: гистерезис в задачах управления и биологии, ферромагнитный и диэлектрический гистерезис в физике, пластический гистерезис в механике и т.п. Для описания гистерезиса выбрана модель Боука-Вена [2-3].

В данной статье исследовано влияние гистерезисного звена на поведение нелинейной динамической системы, демонстрирующей

внутренний резонанс при определенном соотношении частот, а также возможно ли стабилизировать поведение нелинейной системы с внутренним резонансом, влияет ли гистерезис на параметры внутреннего резонанса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим два связанных между собой нелинейных осциллятора с частотами ω_1, ω_2 , которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка с нелинейной правой частью:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 (1 + \varepsilon y)^2 x + \alpha z = -2\mu\dot{x} - \alpha_1 x^3 + \alpha_2 y, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = -2\mu\dot{y} + \alpha_3 x - \alpha_4 y^3; \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_4 > 0$ - коэффициенты при нелинейных слагаемых, $\alpha_2, \alpha_3 > 0$ - связь между осцилляторами, μ - коэффициент вязкого трения, z - гистерезисное звено, для его описания была выбрана модель Боука-Вена [2-3]:

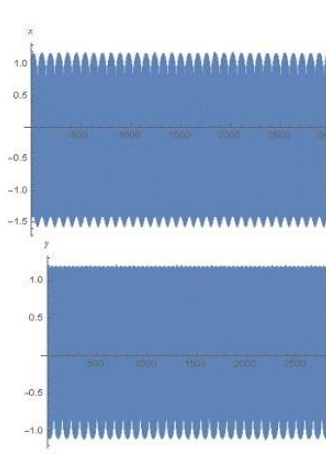
$$\dot{z} = \sigma\dot{x} - \beta\dot{x}|z|^n - \gamma z|\dot{x}|z|^{n-1} \quad (2)$$

где σ, β, γ, n - параметры, характеризующие модель Боука-Вена ($n \in \mathbb{N}$), α - отражает влияние гистерезисного слагаемого, ε - малый параметр.

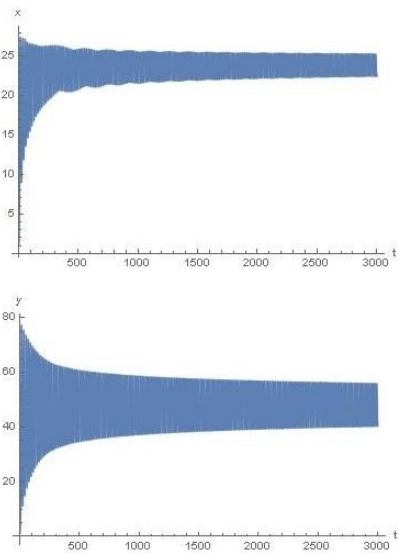
Таким образом, система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая колебания двух связанных осцилляторов с гистерезисным звеном имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 (1 + \varepsilon y)^2 x + \alpha z = -2\mu\dot{x} - \alpha_1 x^3 + \alpha_2 y, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = -2\mu\dot{y} + \alpha_3 x - \alpha_4 y^3, \\ \dot{z} = \sigma\dot{x} - \beta\dot{x}|z|^n - \gamma z|\dot{x}|z|^{n-1}; \end{cases} \quad (3)$$

Решая численно вышеописанную систему при значениях $\alpha = 0.5$, $\omega_1 \approx 2\omega_2 = 1$ (практически получено, что при таком соотношении частот в системе возникает внутренний резонанс [4]) получаем следующие графические данные:



а



б

Рис. 1. График численного решения x, y системы дифференциальных уравнений (3): а - без гистерезисного звена, $\alpha = 0, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.5$, б - с гистерезисным звеном, $\alpha = 0.5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.5$

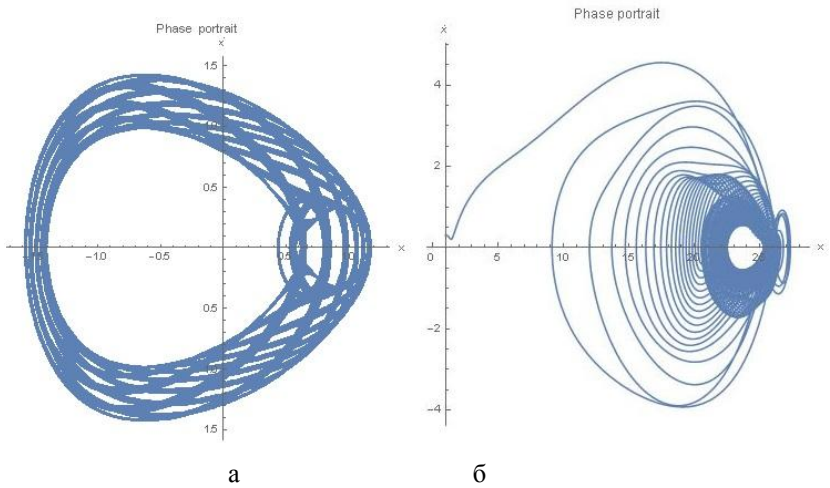


Рис. 2. Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (3), а - без гистерезисного звена,

$\alpha = 0, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.5$, б - с гистерезисным звеном,

$\alpha = 0.5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.5$

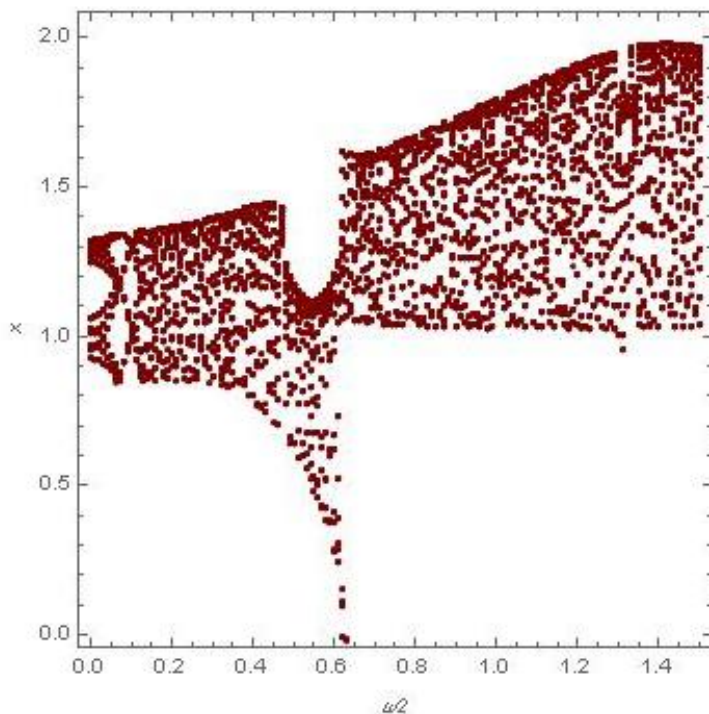


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы без гистерезисного звена (по оси абсцисс - данные значений параметра ω_2 , по оси ординат - значения динамической переменной x) $\alpha = 0, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.5$

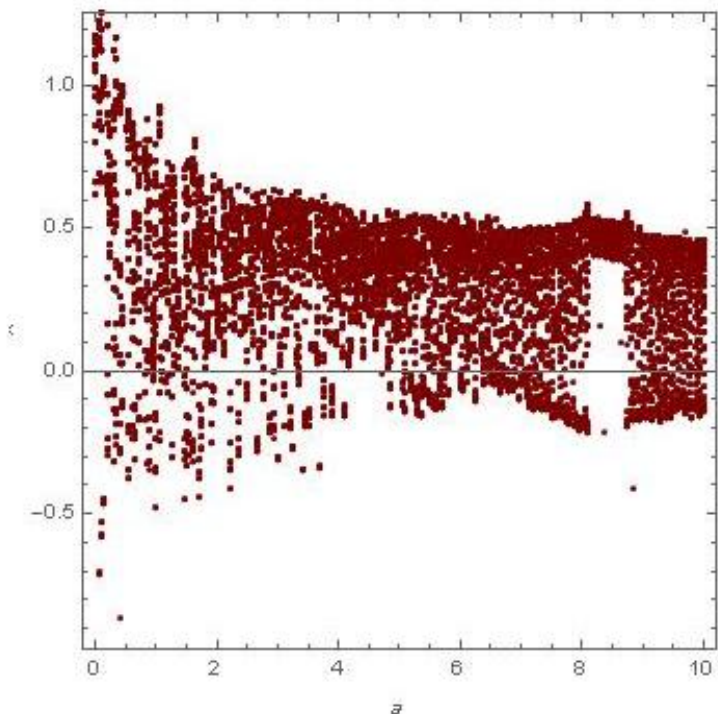


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма системы с гистерезисным звеном (по оси абсцисс - данные значений параметра α , по оси ординат - значения динамической переменной

$$x) \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.5$$

Заключение

Проведенное моделирование поведения нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений (3), описывающей колебания двух связанных между собой нелинейных осцилляторов, показывает, что при наличии в системе гистерезисного звена, который описывается моделью Боука-Вена, происходит стабилизация системы.

Литература

1. Смирнов А. С., Смольников Б. А. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 269–292.

2. Соловьёв, А. М. Модель динамики биологической нейронной сети с гистерезисными связями / А. М. Соловьёв, Е.Г. Кабулова, М.Е. Семенов // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. - 2018. - №1. С. 133 - 141.

3. Семенов М.Е. Динамические особенности систем гистерезисно связанных осцилляторов Ван дер Поля /М.Е. Семенов, П.А. Мелешенко, А.М. Соловьёв, О.О. Решетова // Математическое моделирование физико-технических процессов и систем: сб. тр. ИТНТ-2019 V Международной конференции и молодёжной школы "Информационные технологии и нанотехнологии" (Самара, 21–24 мая 2019 г.). - Самара, 2019. - С. 483-488.

4. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. - М.:Мир, 1984, 535 с., ил.